TD 13 : Le théorème de d'Alembert-Gauss
Avril-Mai 2012

Cette semaine, un TP un peu moins algorithmique, et plus mathématique.

On va ici esquisser une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme à coefficients complexes de degré au moins un admet une racine dans $\mathbb{C}$. Comme nous ne sommes pas Gauss, nous allons expérimenter plus que démontrer.

Il n'y aura pas beaucoup de programmation, ici, mais plus d'expérimentation. Les principales commandes Maple utiles seront `plot`, `implicitplot`, `expand`, `assume`, ainsi que bien d'autres.

N'hésitez pas à faire de beaux graphiques grâce aux options `numpoints`, `grid`, `scaling=constrained`... Nous prendrons comme premier exemple le polynôme P suivant (déjà considéré par Gauss) :

```
> P_0 := X -> X^7 + 28 X^4 - 480
```

On considérera aussi $A = X^4 - 9X + 18$, $B = X^4 + 5X + 5$, $L_4 = ((1 - X^2)^4)^{(4)}$.

Pour pouvoir tracer les courbes de différents polynômes facilement, on écrira à chaque question des procédures.

On rappelle qu'en Maple, on écrit le nombre imaginaire i en majuscule, `I`.

1 Tracé des branches de l'équation $P(z) = 0$

Question 1 Si on pose $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, écrire une procédure `projette(P)` qui renvoie l'expression de $\Re(P(z))$ et de $\Im(P(z))$ en fonction de x et y.

Question 2 Ecrire une procédure `afficheZeros(P)` qui affiche sur un même graphique $\Re(P(z)) = 0$ et $\Im(P(z)) = 0$ dans des couleurs différentes.
On utilisera pour cela la fonction `plots[implicitplot]`, qui peut afficher les solutions d'une équation polynômiale, et la fonction `display` pour réunir les deux images sur un même graphique.
Comment reconnait-on graphiquement les racines de P ? Faire un zoom sur un point où la situation n'est pas claire pour P_0.

Question 3 Ajouter au graphique des zéros de P_0 un cercle vert de centre O et de rayon au choix (mais pas trop grand quand même) tel que toutes les racines de P_0 soient à l'intérieur du cercle.
Comment est-on sûr qu'elles y sont toutes ?

2 Expression en coordonnées polaires

Question 4 (Facultative) Exprimer $\Re(P_0(z))$ et $\Im(P_0(z))$ en coordonnées polaires.
On exprimera $\Re(P_0)$ et $\Im(P_0)$ en fonction de r, $\cos t$ et $\sin t$.

Question 5 A l'aide de `plot3d`, écrire une procédure `coord3d(P)` qui trace de trois couleurs différentes les surfaces correspondant à $(x, y) \mapsto \Re(P)$, $(x, y) \mapsto \Im(P)$ et $z = 0$.

3 Démonstration du théorème

Soient $T = \Re(P)$ et $U = \Im(P)$.

Question 6 Quelle propriété sur les courbes de T et U cherche-t-on à montrer ? Vérifier que pour les polynômes ci-dessus, cette propriété est vérifié. Le vérifier aussi pour quelques polynômes de votre choix.
Si vous avez le temps, vous pouvez écrire une procédure `randPoly(n,m)` qui génère aléatoirement un polynôme de degré n à coefficients entiers entre $-m$ et m.

Question 7 Pourquoi les courbes $T = 0$ et $U = 0$ ne sont-elles pas vides ? (On pourra regarder le comportement lorsque $r \to +\infty$).
Pourquoi sont-elles si régulières en dehors d'un grand disque ?

Question 8 Regarder l'alternance des courbes $T = 0$ et $U = 0$ sur un grand cercle vert. Que constate-t-on ? Qu'en déduire ?

Question 9 Comment compter graphiquement le nombre de racines et leur multiplicité ?
Le faire pour P_0.

Question 10 Pour les polynômes suivants, déterminer leurs racines (avec multiplicités si possible) et comparer avec les résultats numériques donné par `solve`.

```
> L_4:=diff((1-X^2)^4,X$4);
> C:=numtheory[cyclotomic](k,X);
> (éventuellement faire varier k)
```

Conclusion

Nous n'avons pas fait une preuve formelle du théorème fondamental de l'algèbre, mais nous avons pu visualiser avec Maple le comportement de quelques polynômes, et caractériser graphiquement leurs points d'annulation.